目錄

一、微積分史話

1. 前言

近幾世紀以來，科學技術非常發達，究其原因，數學要居首功。舉凡物理、天文、化學、工程、地質、生物等等，甚至社會科學所產生的許多問題，往往要依靠數學工具來解決，而數學工具之中尤以微積分學最為犀利、最具功效。

微積分是微分和積分的合稱。微分是用來研究變化率，而積分是用來求積的（即算曲線長、面積、體積）。但就像乘法和除法一樣，微分和積分兩者之間卻有互為反運算的密切關係，所以必須合起來一起研究，因而合稱為微積分。

本文的主要目的是想從歷史的眼光來探討微分、積分觀念的由來，技巧的演進，微、積分的合流，微積分的用途，其發展中所遭遇到的困難及解決的途徑。

2. 圓面積的求法

人類進入了農業社會後，因為丈量土地、建穀倉、築宮室等等的需要，求積的方法就日形重要起來。

首先，人類可能用一日的行程、一頭牛一天可耕過的土地等方法來量長度、算面積。但隨著精確度的要求，長度及面積都必須要有固定的單位。

通常面積都是以某種正方形為單位的（譬如一平方公尺）。由此出發逐步可得一般正方形的面積為一邊的平方，矩形的面積為長乘寬，平行四邊形的面積為底乘高，而三角形的面積則為底乘高之半。因多邊形可分劃成三角形之和，所以其面積也可求得。除了這些圖形之外，最簡單、最吸引人也最實用的可算是圓形了。那麼圓形的面積怎麼求得？在此我們觸到了積分學的源頭了。

「圓形的面積是多少？」「圓周率乘半徑的平方。」「圓周率是什麼？」「圓周與直徑之比。」「比值是多少？」「3.14」「再精確點！」「3.1416」「再精確點!!」「3.1416……」「……是什麼？」「？」

圓周率通常以希臘字母 π 來表。大家都知道求圓面積就等於求圓周率。那麼圓周率到底是多少？怎樣求得它的近似值呢？

據史籍所載，四千年前的巴比倫人用 $3\frac{1}{8}$ 做圓周率，同時期的埃及人則用 $(\frac{16}{9})^2$，而三千年前的中國人則用 3。其後有用 $\frac{22}{7}$ 、$\frac{377}{120}$ 、$\sqrt{10}$ 、3.14 等等來代表圓周率。這些都是近似值，有的純由經驗求得，有的則佐以一些理論。此外，最值得稱道的是西元前三世紀的希臘科學家阿基米德（Archimedes, 287～212 B.C.）算得圓周率介於 $3\frac{10}{71}$ 及 $3\frac{1}{7}$ 之間，而三國（大約西元 260 年）時的劉徽，則得其近似值為 3.14159。他們的特色是提供一套能夠計算圓周率值精確到任何位數的方法──至少理論上可行。

3. 窮盡

首先，他證明了弓形 *ACB* 可以被一連串的三角形所「窮盡」。這一連串三角形的作法如下：從 *AC*、*BC* 的中點 *K*、*L* 各作直徑，分別交拋物線於 *P*、*Q*，得三角形 $\triangle APC$ 、$\triangle BQC$ 填充於弓形與 $\triangle ACB$ 之間的空隙處。依同法，從 *AP*、*CP*、*CQ*、*BQ* 的各中點作直徑交拋物線於四點，而又可得四個三角形填充於所剩下的空隙。如此反覆進行，就可以得到一連串的三角形。那麼這一連串的三角形能「窮盡」弓形面積嗎？也就是問，能把空隙填滿嗎？用眼睛看顯然不成問題，但阿基米德還是給了一個證明：如圖二，過 *C* 點作切線，則此切線平行於 *AB*；過 *A*、*B* 作直線平行於 *CM*，分別交切線於 *D*、*E*，則得平行四邊形 *ADEB*。因此 $\triangle ACB = \frac{1}{2}\square ADEB > \frac{1}{2}$ 弓形 *ACB*。 同理可證 $\triangle APC > \frac{1}{2}$ 弓形 *APC*， $\triangle BQC > \frac{1}{2}$ 弓形 *BQC*。一般而言，每一新階段所作的三角形都能把剩下的空隙填掉一半以上，所以這一連串的三角形終究能把弓形